Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій

А. С. Сердюк[1], Т. А. Степанюк[2]
[1]*Інститут математики НАН України, Київ*
[2]*Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк*

Анотація

Отримано порядкові оцінки для найкращих рівномірних наближень тригонометричними поліномами та наближень сумами Фур'є класів 2π–періодичних неперервних функцій, таких, що їх (ψ,β)–похідні f_β^ψ належать одиничним кулям просторів L_p, $1\leq p<\infty$, у випадку коли послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля швидше за будь–яку степеневу функцію. Аналогічні оцінки одержані для наближень в L_s–метриці, $1< s\leq\infty$, для класів сумовних (ψ,β)–диференційовних функцій, таких, що $\| f_\beta^\psi \|_1\leq 1$.

We obtained order estimations for the best uniform approximation by trigonometric polynomials and approximation by Fourier sums of classes of 2π–periodic continuous functions, whose (ψ,β)–derivatives f_β^ψ belong to unit balls of spaces L_p, $1\leq p<\infty$ in case at consequences $\psi(k)$ decrease to nought faster than any power function. We also established the analogical estimations in L_s–metric, $1<s\leq\infty$, for classes of the summable (ψ,β)–differentiable functions, such that $\| f_\beta^\psi \|_1\leq 1$.

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задана за допомогою рівності $\|f\|_C=\max\limits_t|f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}\limits_t|f(t)|$; L_p, $1\leq p<\infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p–му степені на $[0,2\pi)$ функцій $f(t)$, в якому норма задана формулою $\|f\|_p=\Big(\int\limits_0^{2\pi}|f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай далі функція $f(x)\in L_1$, і її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx,$$

$\psi(k)$ — фіксована послідовність дійсних чисел, а β — деяке дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ називають (див., наприклад, [1, с. 132]) (ψ,β)-похідною функції $f(x)$ і позначають $f_\beta^\psi(x)$.

Множину функцій $f(x)$, у яких існує (ψ,β)-похідна позначають через L^{ψ}_{β}, а підмножину неперервних функцій із L^{ψ}_{β} – через C^{ψ}_{β}.

Якщо $f\in L^{\psi}_{\beta}$, і водночас $f^{\psi}_{\beta}\in\mathfrak{N}\subseteq L_1$, то кажуть, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Якщо $\mathfrak{N}=B^0_p$, де $\mathfrak{N}=B^0_p=\{\varphi:\ ||\varphi||_p\leq 1,\ \varphi\perp 1\}$, то покладають $L^{\psi}_{\beta}B^0_p=L^{\psi}_{\beta,p}$.

Як показано в [1, с. 136], якщо послідовність $\psi(k)$ монотонно прямує до нуля при $k\to\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}<\infty$, то елементи $f(\cdot)$ множини $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ при будь–якому $\beta\in\mathbb{R}$ і майже для всіх $x\in\mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_{\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathfrak{N},\ \varphi\perp 1, \tag{1}$$

з сумовним ядром $\Psi_{\beta}(t)$ ряд Фур'є якого має вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big).$$

При цьому функція $\varphi(\cdot)$ майже скрізь співпадає з $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Якщо ж $f\in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N},\ \beta\in\mathbb{R}$, то рівність (1) виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

Якщо $\psi(k)=k^{-r},\ r>0$, то класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ є відомими класами Вейля-Надя $W^r_{\beta,p}$.

Будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ є звуженням на множину натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t\geq 1$ таких, що $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ позначатимемо через $\mathfrak{M}$.

Згідно з [1, с. 159–160], кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\left(\psi(t)/2\right),\quad \mu(t)=\mu(\psi;t)=\frac{t}{\eta(t)-t},$$

де $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до ψ функція і розглянемо множину

$$\mathfrak{M}^+_{\infty}=\left\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad \mu(\psi;t)\uparrow\infty,\ t\to\infty\right\}.$$

Через $\mathfrak{M}'_{\infty}$ позначимо підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}^+_{\infty}$, для кожної з яких величина $\eta(\psi;t)-t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K_1>0$, така, що $\eta(\psi;t)-t\leq K_1,\ t\geq 1$, а через $\mathfrak{M}''_{\infty}$ — підмножину функцій $\psi\in\mathfrak{M}^+_{\infty}$, для кожної з яких величина $\eta(\psi;t)-t$ обмежена знизу деяким додатним числом, тобто існує стала $K_2>0$, така, що $\eta(\psi;t)-t\geq K_2,\ t\geq 1$.

Типовими представниками множини $\mathfrak{M}^+_{\infty}$ є функції $\psi_r(t)=\exp(-\alpha t^r),\ \alpha>0,\ r>0$, причому, якщо $r\geq 1$, то $\psi_r\in\mathfrak{M}'_{\infty}$, а якщо $r\in(0,1]$, то $\psi_r\in\mathfrak{M}''_{\infty}$.

Через F прийнято позначати множину функцій $\psi\in\mathfrak{M}$, таких що $\eta'(\psi,t)=\eta'(\psi,t+0)\leq K$. Відмітимо (див., наприклад, [1, с. 165]), що $\mathfrak{M}^+_{\infty}\subset F$.

Якщо $\psi\in\mathfrak{M}^+_{\infty}$, то (див., наприклад, [2, с. 97]) множини C^{ψ}_{β} складаються з нескінченно диференційовних функцій. З іншого боку, як показано в [3, с. 1692], для кожної нескінченно диференційовної, 2π–періодичної функції f можна вказати функцію ψ з множини $\mathfrak{M}^+_{\infty}$, таку що $f\in C^{\psi}_{\beta}$ для довільних $\beta\in\mathbb{R}$.

Метою даної роботи є знаходження точних порядкових оцінок для величин вигляду

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_X,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$, $\mathfrak{N} \subset X \subset L_1$, а також знаходження точних порядкових оцінок найкращих наближень, тобто величин вигляду

$$E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_X,$$

де $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$, у наступних випадках:

1) $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta,p},\ 1 \le p < \infty,\ X = C$;

2) $\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta,1},\ X = L_s,\ 1 < s \le \infty$

при $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

При $X = L_s, 1 \le s \le \infty$ будемо позначати $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_{L_s}$ через $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_s$, а $E_n(\mathfrak{N})_{L_s}$ через $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_s$ відповідно.

Зробимо короткий історичний огляд дослідження величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$.

Для класів Вейля–Надя $W^r_{\beta,p}$, при довільних $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p,s \le \infty$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_s$, $E_n(W^r_{\beta,p})_s$ відомі (див., наприклад, [4, с. 47–49]).

У випадку $p = s = 1$ і $p = s = \infty$ відомі також асимптотичні рівності при $n \to \infty$ для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_1$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ (див., наприклад, роботи [5]–[7]).

У випадках $p = s = 1$, $p = s = \infty$, $p = s = 2$ та $p = 2$ і $s = \infty$ встановлені точні значення найкращих наближень $E_n(W^r_{\beta,\infty})_\infty$ та $E_n(W^r_{\beta,1})_1$ при усіх $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (див. роботи [8]–[14].

На класах $L^{\psi}_{\beta,p}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ у випадку, коли $\psi(k)k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}$ монотонно незростають і $\psi \in B$, де B — множина монотонно незростаючих при $t \ge 1$ додатних функцій $\psi(t)$, для кожної з яких можна вказати додатну сталу K таку, що $\frac{\psi(t)}{\psi(2t)} \le K,\ \ t \ge 1$, були знайдені у роботі [15] при довільних $1 < p,s < \infty$.

При $p = s = 2$ в [15] також розв'язано задачу про точні значення величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ за умови $\sup\limits_{k\ge n} \psi(k) < \infty$.

Зазначимо також, що при $p = 2$ і $s = \infty$ або $p = 1$ і $s = 2$ точні значення величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$ за умови збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k)$ знайдені у роботах [16] і [17].

В [18] встановлено точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ при $1 \le p < \infty,\ s = \infty$, а також при $p = 1$ і $1 < s \le \infty$, у випадку коли $\psi \in B \cap \Theta_p$, де Θ_p, $1 \le p < \infty$, — множина монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha > \frac{1}{p}$ така, що функція $t^\alpha \psi(t)$ майже спадає.

При $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, для довільних $1 \le p,s \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, встановлені в [2, с. 225] (див. також [19, с. 48]) і мають вигляд

$$C^{(1)}_{p,s}\psi(n) \le E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \le C^{(2)}_{p,s}\psi(n), \tag{2}$$

де $C^{(1)}_{p,s},\ C^{(2)}_{p,s}$ — додатні сталі, що залежать тільки від p і s.

В [2, с. 219] (див. також [19, с. 60]) знайдено також точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ та $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, при $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, для довільних $1 < p, s < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і $\beta \in \mathbb{R}$, які мають вигляд

$$C^{(3)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\alpha} \leq E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leq C^{(4)}_{p,s}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\alpha}, \tag{3}$$

де $C^{(3)}_{p,s}$, $C^{(4)}_{p,s}$ — додатні сталі, що залежать тільки від p і s, а $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$, якщо $p < s$, і $\alpha = 0$, якщо $p \geq s$.

Оцінка зверху в співвідношенні (3) є справедливою і у випадку $p = 1$, за умови $p < s < \infty$ (див. [2, с. 224]).

У випадках $p = s = 1$, $p = s = \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ в [20] встановлено асимптотичні рівності для величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$. Крім того в [21] при $p = s = \infty$ та $p = s = 1$ отримано точні значення величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$ і $E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$ за умови, що функція $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$ має наступні властивості: 1) $\Delta^2\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(k) - 2\psi(k+1) + \psi(k+2) \geq 0$, $\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} \leq \rho,\ 0 < \rho < 1,\ k = n, n+1, ...$; 2) $\frac{\Delta^2\psi(n)}{\psi(n)} > \frac{(1+3\rho)\rho^{2n}}{(1-\rho)\sqrt{1-2\rho^{2n}}}$.

В [22] для $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$, за умови, що починаючи з деякого $t_0 \geq 1$ $\eta(t) - t > 1$, встановлено точні порядкові оцінки величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_s$, $\beta \in \mathbb{R}$ при $1 < p < \infty$, $s = \infty$, котрі мають вигляд:

$$C^{(1)}_{\psi,p}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq \mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \leq C^{(2)}_{\psi,p}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\ n \in \mathbb{N},$$

де $C^{(1)}_{\psi,p}$, $C^{(2)}_{\psi,p}$ — додатні сталі, що залежать від ψ і p.

В даній роботі встановлено точні порядкові оцінки величин $E_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C$, $E_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ і $\mathcal{E}_n\big(L^{\psi}_{\beta,1}\big)_s$ для довільних $1 \leq p < \infty$, $1 < s \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$, у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t) - t) = \infty$, $\eta(t) - t \geq a > 2$, $\mu(t) \geq b > 2$. При цьому константи в порядкових оцінках записуються через параметри задачі в явному вигляді. Отримані оцінки доповнюють і уточнюють згадані вище результати робіт [2, с. 219] (див. також [19, с. 60]) та [22].

Перейдемо до викладу основних результатів.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t) - t) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. *Тоді для* $n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$ *справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} \leq E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \leq \mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C \leq$$

$$\leq C_{a,b}\ (2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

де

$$C_a = \frac{\pi}{96\left(1+\pi^2\right)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}, \tag{5}$$

$$C_{a,b} = \frac{1}{\pi}\max\left\{\frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a},\ 2\pi\right\}. \tag{6}$$

Доведення теореми. Спочатку оцінимо зверху величину $\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C$. Згідно з інтегральним зображенням (1), для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ майже скрізь виконується рівність

$$f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\beta,n}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{7}$$

де

$$\|\varphi\|_p \le 1, \ \varphi \perp 1, \tag{8}$$

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big). \tag{9}$$

При цьому, якщо $f \in C^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, то рівність (7) виконується в кожній точці.
Далі нам буде корисним твердження роботи [1, с. 137–138].
Твердження 1. *Якщо* $h \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, $g \in L_{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *то згортка*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} h(x-t)g(t)dt$$

неперервна на всій осі, причому

$$\|f\|_C \le \frac{1}{\pi}\|h\|_p\|g\|_{p'}. \tag{10}$$

В силу твердження 1, та формул (7) і (8)

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,p}\big)_C \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}\|\varphi(\cdot)\|_p \le \frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}, \tag{11}$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$.

Застосувавши до функції $\Psi_{\beta,n}(t)$ перетворення Абеля, при довільному $n \in \mathbb{N}$ одержимо

$$\Psi_{\beta,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}(\psi(k) - \psi(k+1))D_{k,\beta}(t) - \psi(n)D_{n-1,\beta}(t), \tag{12}$$

де

$$D_{k,\beta}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\beta\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt - \frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Врахування відомих формул (див., наприклад, [2, с. 40,42])

$$D_{k,0}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos kt = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, \ 0 < |t| \le \pi, \tag{13}$$

і
$$D_{k,1}(t)=\sum_{j=1}^{k}\sin kt=\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\ 0<|t|\leq\pi, \tag{14}$$
де $D_{k,0}$ — ядро Діріхле порядку k, а $D_{k,1}$ — спряжене ядро Діріхле порядку k, дозволяє записати
$$D_{k,\beta}(t)=\cos\frac{\beta\pi}{2}D_{k,0}(t)+\sin\frac{\beta\pi}{2}D_{k,1}(t)=$$
$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}+\sin\frac{\beta\pi}{2}\frac{\cos\frac{t}{2}-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=$$
$$=\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\beta\pi}{2}\right)+\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}},\ 0<|t|\leq\pi. \tag{15}$$
Оскільки
$$\sin\frac{t}{2}\geq\frac{t}{\pi},\quad 0\leq t\leq\pi, \tag{16}$$
то з (15) одержимо
$$|D_{k,\beta}(t)|\leq\frac{\pi}{|t|},\ 0<|t|\leq\pi. \tag{17}$$
З формул (12) і (17) випливає, що
$$|\Psi_{\beta,n}(t)|\leq 2\pi\psi(n)\frac{1}{|t|},\ 0<|t|\leq\pi. \tag{18}$$

Крім того, згідно з (9) для довільних $t\in\mathbb{R}$
$$|\Psi_{\beta,n}(t)|\leq\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\leq\psi(n)+\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)du. \tag{19}$$

Для оцінки інтеграла в правій частині формули (19), скористаємось наступним твердженням роботи [23, с. 500].

Твердження 2. *Якщо функція* $\psi\in\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, *то для довільного* $m\in\mathbb{N}$, *такого, що* $\mu(\psi,m)>2$ *виконується умова*
$$\int\limits_{m}^{\infty}\psi(u)du\leq\frac{2}{1-\frac{2}{\mu(m)}}\psi(m)(\eta(m)-m). \tag{20}$$

Якщо $\mu(\psi,n)\geq b>2$, то з нерівності (20), отримуємо
$$\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)du\leq\frac{2b}{b-2}\psi(n)(\eta(n)-n). \tag{21}$$
З урахуванням формул (19) і (21), а також умови $\eta(n)-n\geq a>0$, маємо
$$|\Psi_{\beta,n}(t)|\leq\left(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}\right)\psi(n)(\eta(n)-n),\ a>0,\ b>2. \tag{22}$$

Поклавши $C_{a,b}=\frac{1}{\pi}\max\{\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a},\ 2\pi\}$, та використовуючи формули (18), (22), отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_{p'}\leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)\left(\int\limits_{|t|\leq\frac{1}{\eta(n)-n}}(\eta(n)-n)^{p'}dt+\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\leq|t|\leq\pi}\frac{dt}{|t|^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}\,2^{\frac{1}{p'}}\left(1+\frac{1}{p'-1}\left(1-\frac{\pi^{1-p'}}{(\eta(n)-n)^{p'-1}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}<$$

$$<C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}\left(1+\frac{1}{p'-1}\right)^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=C_{a,b}2^{\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{p'}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\quad 1<p'<\infty,\ a>0,\ b>2. \tag{23}$$

З рівності (22), отримуємо, що при $p'=\infty$

$$\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{p'}=\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_{\infty}\leq\frac{1}{\pi}\left(\frac{2b}{b-2}+\frac{1}{a}\right)\psi(n)(\eta(n)-n)\leq$$

$$\leq C_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n),\ a>0,\ b>2. \tag{24}$$

Зі співвідношень (11), (23) і (24) при $a>0,\ b>2,\ 1\leq p<\infty$ отримуємо оцінку

$$\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C\leq C_{a,b}(2p)^{1-\frac{1}{p}}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}.$$

Для завершення доведення теореми 1, враховуючи очевидну нерівність

$$E_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C\leq\mathcal{E}_n\Big(C^{\psi}_{\beta,p}\Big)_C,$$

потрібно показати, що за умови виконання умов $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$ і $\eta(n)-n\geq$ $\geq a>2,\ \mu(n)\geq b>2$, знайдеться функція $f^*\in C^{\psi}_{\beta,p}$, така, що

$$E_n(f^*)_C=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f^*(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)\|_C\geq$$

$$\geq\frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}},\ 1\leq p\leq\infty. \tag{25}$$

Позначивши цілу частину дійсного числа α через $[\alpha]$, розглянемо при заданому $n\in\mathbb{N}$ функцію

$$f_p(t)=f_p(\psi;n;t)=\frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}\frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}}\times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right),\ a>2, \tag{26}$$

в якій величини $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$, $N,M\in\mathbb{N}$ $(N<M)$ означаються за допомогою формули

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)=\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right), \tag{27}$$

де $\gamma\in\mathbb{R}$, а $\lambda(k)$, $k=1,2,...$ — фіксована послідовність дійсних чисел.

Покажемо спочатку, що функція $f_p(\cdot)$ належить класу $C^{\psi}_{\beta,p}, 1\leq p\leq\infty$. Для цього досить переконатись у виконанні нерівності

$$\left\|\left(f_p(\cdot)\right)^{\psi}_{\beta}\right\|_p\leq 1,\ 1\leq p\leq\infty. \tag{28}$$

З цією метою спочатку покажемо, що для функції $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ справедливе твердження.

Лема 1. *Нехай $\gamma\in\mathbb{R}$, а $\lambda(k)$, $k=1,2,...$ — деяка послідовність дійсних чисел. Тоді для довільних $N,M\in\mathbb{N}$ $(N<M)$ має місце рівність*

$$W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}\left(M-k\right)\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right). \tag{29}$$

Доведення леми 1. Рівність (29) випливає із наступного ланцюжка перетворень:

$$\frac{1}{M-N}\sum_{k=N}^{M-1}\sum_{j=1}^{k}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)=$$

$$=\frac{1}{M-N}\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)+...+\sum_{j=1}^{M-1}\lambda(j)\cos\left(jt+\gamma\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\left[(M-N-1)\lambda(N+1)\cos\left((N+1)t+\gamma\right)+...+\right.$$

$$\left.+\lambda(M-1)\cos\left((M-1)t+\gamma\right)\right]=\sum_{k=1}^{N}\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right)+$$

$$+\frac{1}{M-N}\sum_{k=N+1}^{M-1}\left(M-k\right)\lambda(k)\cos\left(kt+\gamma\right).$$

Лему 1 доведено.

Двічі використавши рівність (29), отримуємо

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)=\sum_{k=1}^{[\eta(n)]}\psi(k)\cos kt+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k)\,\psi(k)\cos kt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\psi(k)\cos kt-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}([\eta(n)]-k)\,\psi(k)\cos kt=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]}\psi(k)\cos kt-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}([\eta(n)]-k)\,\psi(k)\cos kt+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k)\,\psi(k)\cos kt=$$

$$=\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)\psi(k)\cos kt+\psi([\eta(n)])\cos([\eta(n)]t)+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k)\,\psi(k)\cos kt. \qquad (30)$$

Оскільки $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ є тригонометричним поліномом порядку M, то згідно з означенням (ψ,β)–похідної, серед функцій $(W_{N,M}(\lambda;\gamma;t))^{\psi}_{\beta}$ знайдеться така, що також є тригонометричним поліномом порядку M. Надалі саме таку функцію будемо розуміти під записом $(W_{N,M}(\lambda;\gamma;t))^{\psi}_{\beta}$.

Враховуючи співвідношення (30) та означення (ψ,β)–похідної, для довільних $\psi\in\mathfrak{M}$, $\beta\in\mathbb{R}$ отримуємо рівність

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}=$$

$$=\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1}(k-n)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\cos\left([\eta(n)]t+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1}([\eta(\eta(n))]-k)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (31)$$

Для доведення нерівності (28) буде корисним наступне твердження.

Лема 2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\eta(n)-n\geq a$, $\mu(n)\geq b$, β *— довільне дійсне число. Тоді*
1) якщо $a>0$, $b>0$, *то*

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)(\eta(n)-n),\ \ t\in\mathbb{R}; \qquad (32)$$

2) якщо $a>2$, $b>0$, *то*

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta}\right|\leq$$

$$\leq \left(\frac{a}{a-1} + \frac{2a}{a-2} \right) \frac{\pi^2}{t^2} \frac{1}{\eta(n) - n}, \quad 0 < |t| \leq \pi. \tag{33}$$

Доведення леми 2. Спочатку встановимо істинність оцінки (32). З рівності (31), випливає, що

$$\left| \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t) \right)_\beta^\psi \right| \leq \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n) +$$

$$+1 + \frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))] - k) = \frac{[\eta(n)] - n - 1}{2} + 1 +$$

$$+ \frac{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(([\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]) + ([\eta(n)] - n) \right). \tag{34}$$

Щоб оцінити величини $[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]$ і $[\eta(n)] - n$ використаємо наступне твердження.

Лема 3. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\eta(n) - n \geq a > 0$, $\mu(n) \geq b > 0$. *Тоді*

1) якщо $a > 1$, $b > 0$, *то*

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right) (\eta(n) - n) < [\eta(n)] - n \leq \eta(n) - n; \tag{35}$$

2) якщо $a > 2$, $b > 0$, *то*

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right) (\eta(n) - n) < [\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] < \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) (\eta(n) - n). \tag{36}$$

Доведення леми 3. Друга нерівність в (35) є очевидною. Позначивши $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, при $\eta(n) - n \geq a > 1$ одержуємо

$$[\eta(n)] - n = \eta(n) - n - \{\eta(n)\} = (\eta(n) - n) \left(1 - \frac{\{\eta(n)\}}{\eta(n) - n}\right) >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{a}\right) (\eta(n) - n).$$

Тим самим (35) доведено.

Щоб переконатись в справедливості нерівностей (36), спочатку покажемо, що при $\eta(n) - n \geq a > 0$ і $\mu(n) \geq b > 0$ має місце співвідношення

$$\frac{1}{2} (\eta(n) - n) \leq \eta(\eta(n)) - \eta(n) < \left(1 + \frac{1}{b}\right) (\eta(n) - n). \tag{37}$$

Дійсно, беручи до уваги означення функції $\mu(t)$, для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ справедлива рівність

$$\eta(t) = t \left(1 + \frac{\eta(t) - t}{t}\right) = t \left(1 + \frac{1}{\mu(t)}\right). \tag{38}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то функція $\frac{1}{\mu(t)}$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. Нехай $\mu(t) \geq b > 0$. Тоді в силу (38), маємо

$$\eta'(t) = 1 + \frac{1}{\mu(t)} + t\left(\frac{1}{\mu(t)}\right)' \leq 1 + \frac{1}{\mu(t)} \leq 1 + \frac{1}{b}. \tag{39}$$

Зазначимо також, що для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ (див., наприклад, [1, с. 162–163])

$$\eta'(t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \geq \frac{1}{2},\ t \geq 1,\ \eta'(t) = \eta'(t+0). \tag{40}$$

З (39) і (40), а також з рівності

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} \eta'(u)du,$$

випливає (37).

Застосування нерівностей (37) при $a > 0,\ b > 0$ дозволяє записати співвідношення

$$[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] \leq \eta(\eta(n)) - \eta(n) + \{\eta(n)\} < \left(1 + \frac{1}{b}\right)(\eta(n) - n) + 1 =$$

$$= (\eta(n) - n)\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{\eta(n) - n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(\eta(n) - n)\,, \tag{41}$$

а при $a > 2,\ b > 0$ — співвідношення

$$[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)] \geq \eta(\eta(n)) - \eta(n) - \{\eta(\eta(n))\} > \frac{1}{2}(\eta(n) - n) - 1 =$$

$$= (\eta(n) - n)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\eta(n) - n}\right) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right)(\eta(n) - n)\,. \tag{42}$$

Нерівності (41) і (42) доводять (36). Лему 3 доведено.

Щоб переконатись у справедливості (32), достатньо скористатись формулою (34) і застосувати нерівності (35) і (36) леми 3.

Перейдемо до доведення нерівності (33). В силу означення (ψ, β)–похідної та на підставі (27) для довільної $\psi \in \mathfrak{M}$ одержуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi; 0; t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi; 0; t)\right)_\beta^\psi =$$

$$= \left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))] - [\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1} \sum_{j=1}^{k} \psi(j)\cos jt\right)_\beta^\psi -$$

$$- \left(\frac{1}{[\eta(n)] - n} \sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1} \sum_{j=1}^{k} \psi(j)\cos jt\right)_\beta^\psi =$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sum_{j=1}^{k}\cos\left(jt+\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (43)$$

Застосовуючи до правої частини рівності (43) рівність (15), та формулу

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(x+ky\right)=\sin\left(x+\frac{N-1}{2}y\right)\sin Ny\,\mathrm{cosec}\,\frac{y}{2},$$

(див., наприклад, [24, с. 43]) із (43) отримуємо

$$\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}D_{k,-\beta}(t)-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}D_{k,-\beta}(t)=$$

$$=\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\frac{\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\sin\frac{\beta\pi}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\sum_{k=[\eta(n)]}^{[\eta(\eta(n))]-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\sum_{k=n}^{[\eta(n)]-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\left(\sin\left(\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(\eta(n))]}{2}t-\right.\right.$$

$$\left.-\sin\left(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t\right)-$$

$$-\frac{1}{[\eta(n)]-n}\left(\sin\left(\frac{[\eta(n)]}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{[\eta(n)]}{2}t-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left(\frac{n}{2}t+\frac{\beta\pi}{2}\right)\sin\frac{n}{2}t\right)\right). \qquad (44)$$

Беручи до уваги рівність (44) і нерівність (16), маємо

$$\left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_{\beta}^{\psi}\right|\leq$$

$$\le \frac{\pi^2}{t^2}\left(\frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}+\frac{1}{[\eta(n)]-n}\right), \quad 0<|t|\le\pi. \tag{45}$$

Враховуючи (45), та використовуючи нерівності (35) і (36), отримуємо (33). Лему 2 доведено.

Використовуючи лему 2, покажемо виконання нерівності (28). З (32) випливає оцінка

$$\int\limits_{|t|\le\frac{1}{\eta(n)-n}} \left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right|^p dt \le$$

$$\le \int\limits_{|t|\le\frac{1}{\eta(n)-n}} \left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^p (\eta(n)-n)^p dt =$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)^p (\eta(n)-n)^{p-1}, \tag{46}$$

а з нерівності (33) — оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\le|t|\le\pi} \left|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right|^p dt \le$$

$$\le \left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^p \pi^{2p}\frac{1}{(\eta(n)-n)^p}\int\limits_{\frac{1}{\eta(n)-n}\le|t|\le\pi}\frac{1}{t^{2p}}dt =$$

$$= \left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^p \pi^{2p}(\eta(n)-n)^{p-1}\frac{2}{2p-1}\left(1-\frac{\pi^{1-2p}}{(\eta(n)-n)^{2p-1}}\right) <$$

$$< 2\pi^{2p}\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)^p (\eta(n)-n)^{p-1}. \tag{47}$$

Об'єднуючи (46)–(47), та враховуючи очевидну нерівність

$$\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2} > 1+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}, \ \ a>2, \ \ b>2, \tag{48}$$

маємо

$$\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_\beta^\psi\right\|_p \le$$

$$\le \left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right) 2^{\frac{1}{p}}\left(1+\pi^{2p}\right)^{\frac{1}{p}}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2\left(\frac{a}{a-1}+\frac{2a}{a-2}\right)\left(1+\pi^2\right)(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}, \ \ 1\le p<\infty. \tag{49}$$

Крім того, з (32) та (48) випливає, що при $a > 2$ і $b > 2$

$$\left\| \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta} \right\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right)(\eta(n) - n) < \frac{a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n) - n). \tag{50}$$

З (26), (49) і (50) одержуємо оцінку

$$\left\| \left(f_p(t)\right)^{\psi}_{\beta} \right\|_p = \frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}} \times$$

$$\times \left\| \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^{\psi}_{\beta} \right\|_p \leq 1, \ 1 \leq p \leq \infty, \tag{51}$$

яка доводить включення $f_p \in C^{\psi}_{\beta,p}$, при всіх $1 \leq p \leq \infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$.

Далі покажемо, що шуканою функцією f^* є функція f_p, тобто для $f^*(\cdot) = f_p(\cdot)$ виконується оцінка (25). Дійсно, в силу (30), бачимо, що для будь–якого тригонометричного полінома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) t_{n-1}(t)dt = 0. \tag{52}$$

Із (26) та (52) маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_p(t) - t_{n-1}(t)\right) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_p(t) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt =$$

$$= \frac{(a-1)(a-2)}{2\left(1+\pi^2\right)a(3a-4)} \frac{1}{(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{p}}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right) \times$$

$$\times \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt. \tag{53}$$

Застосовуючи рівність (29) до функцій $W_{N,M}(\lambda;\gamma;t)$ при $\lambda(k) = 1, \ \gamma = 0, \ N = n$, $M = [\eta(n)]$, а також при $\lambda(k) = 1, \ \gamma = 0, \ N = [\eta(n)], \ M = [\eta(\eta(n))]$, і діючи так само, як і при доведенні співвідношення (30), легко показати, що

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \frac{1}{[\eta(n)]-n} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)\cos kt + \cos([\eta(n)]t) +$$

$$+ \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} ([\eta(\eta(n))]-k)\cos kt. \qquad (54)$$

На основі рівностей (30) і (54), а також формул

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos mt dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{N},$$

отримуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi; 0; t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi; 0; t) \right) \times$$

$$\times \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1; 0; t) - W_{n,[\eta(n)]}(1; 0; t) \right) dt =$$

$$= \frac{\pi}{([\eta(n)]-n)^2} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} \psi(k)(k-n)^2 +$$

$$+ \pi\psi([\eta(n)]) + \frac{\pi}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} \psi(k) \left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2. \qquad (55)$$

Оскільки $\psi(t)$ монотонно спадає, то, згідно з означенням характеристики $\eta(t)$, маємо

$$\frac{\pi}{([\eta(n)]-n)^2} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} \psi(k)(k-n)^2 + \pi\psi([\eta(n)]) +$$

$$+ \frac{\pi}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} \psi(k) \left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2 \geq$$

$$> \pi\psi(\eta(\eta(n))]) \left(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2} \sum_{k=n+1}^{[\eta(n)]-1} (k-n)^2 + 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2} \sum_{k=[\eta(n)]+1}^{[\eta(\eta(n))]-1} \left([\eta(\eta(n))]-k\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\psi(n) \left(\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2} \sum_{k=1}^{[\eta(n)]-n-1} k^2 + 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2} \sum_{k=1}^{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1} k^2 \right). \qquad (56)$$

Використовуючи формулу (див., наприклад, [24, с. 15])

$$\sum_{k=1}^{M} k^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}, \quad M \in \mathbb{N},$$

при $M=[\eta(n)]-n-1$ та $M=[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1$, одержуємо

$$\frac{1}{([\eta(n)]-n)^2}\sum_{k=1}^{[\eta(n)]-n-1} k^2 + 1 + \frac{1}{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2}\sum_{k=1}^{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1} k^2 =$$

$$= \frac{([\eta(n)]-n-1)([\eta(n)]-n)(2[\eta(n)]-2n-1)}{6([\eta(n)]-n)^2} + 1 +$$

$$+ \frac{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1)([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])(2[\eta(\eta(n))]-2[\eta(n)]-1)}{6([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])^2} =$$

$$= \frac{([\eta(n)]-n-1)(2[\eta(n)]-2n-1)}{6([\eta(n)]-n)} + 1 +$$

$$+ \frac{([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]-1)(2[\eta(\eta(n))]-2[\eta(n)]-1)}{6([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)])} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2([\eta(n)]-n) + 2([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]) + \frac{1}{[\eta(n)]-n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\right). \tag{57}$$

В силу нерівностей (35) і (36), при $a>2$, маємо

$$\frac{1}{6}\left(2([\eta(n)]-n) + 2([\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]) + \frac{1}{[\eta(n)]-n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[\eta(\eta(n))]-[\eta(n)]}\right) > \frac{3a-4}{6a}(\eta(n)-n). \tag{58}$$

Об'єднання формул (53)–(58) дозволяє записати наступну оцінку, справедливу для будь-якого $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(f_p(t) - t_{n-1}(t)\big)\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt \geq$$

$$\geq \frac{\pi(a-1)(a-2)}{48\,(1+\pi^2)\,a^2}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}. \tag{59}$$

З іншого боку, в силу (27) і означення (ψ,β)–похідної при $\beta=0$

$$W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t) =$$

$$= \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)_0^{\psi}, \tag{60}$$

тому використовуючи нерівності (10) і (49), отримуємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_p(t) - t_{n-1}(t)\right) \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) dt \leq$$

$$\leq \|f_p(t) - t_{n-1}(t)\|_{\infty} \left\| \left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t) - W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \frac{2\left(1+\pi^2\right) a(3a-4)}{(a-1)(a-2)} \|f_p(t) - t_{n-1}(t)\|_{\infty}. \tag{61}$$

З (59) і (61) випливає, що для довільного $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_p(t) - t_{n-1}(t)\|_{\infty} \geq \frac{\pi(a-1)^2(a-2)^2}{96\left(1+\pi^2\right)^2 a^3(3a-4)} \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= C_a \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}. \tag{62}$$

Із (62) для класів $C^{\psi}_{\beta,p}$ при $\psi \in \mathfrak{M}^+_{\infty}$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t) - t) = \infty$, $\eta(n) - n \geq a > 2$, $\mu(n) \geq b > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ одержуємо оцінку (25). Теорему 1 доведено.

Важливим прикладом функцій $\psi(t)$ з множини $\mathfrak{M}^+_{\infty}$, які задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t) - t) = \infty$, є функції

$$\psi_r(t) = \exp(-\alpha t^r),\ \alpha > 0,\ r \in (0,1). \tag{63}$$

Для них $\eta(\psi_r;n) = (\alpha^{-1}\ln 2 + n^r)^{\frac{1}{r}}$. Тоді, використавши узагальнену нерівність Бернуллі

$$(1+x)^{\rho} \geq 1 + \rho x,\ x > -1,\ \rho \in (-\infty, 0] \cup [1,\infty),$$

отримуємо

$$\eta(\psi_r;n) - n = n\left(\left(1 + \frac{\ln 2}{\alpha n^r}\right)^{\frac{1}{r}} - 1\right) \geq \frac{\ln 2}{\alpha r} n^{1-r},\ n \in \mathbb{N}. \tag{64}$$

З формули (64) випливає, що для всіх номерів $n \geq 1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}$ виконується нерівність

$$\eta(\psi_r;n) - n \geq a > 2,$$

при

$$a = a(\alpha, r) = \frac{\ln 2}{\alpha r}\left(1 + \left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}. \tag{65}$$

В силу (65)

$$\mu(\psi_r;n) = \frac{n}{\eta(\psi_r;n) - n} = \frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r} + 1\right)^{\frac{1}{r}} - 1}$$

і, як неважко переконатись, для всіх $n \geq 1+2\left(\frac{\ln 2}{\alpha(3^r-2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}$ виконується нерівність

$$\mu(\psi_r;n) \geq b > 2,$$

де

$$b = b(r,\alpha) = \left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\left(1+2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\left(3^r-2^r\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^{-r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{-1}. \qquad (66)$$

З наведених вище міркувань випливає, що до класів $C^{\psi}_{\beta,p}$, породжених послідовностями $\psi_r(t)$ вигляду (63) можна застосувати теорему 1, в умові якої параметри a і b визначаються формулами (65) і (66) відповідно. В результаті одержимо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\psi_r(t) = \exp\left(-\alpha t^r\right)$, $r \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для усіх номерів n, таких, що*

$$n \geq 1+\max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\left(3^r-2^r\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq E_n\left(C^{\psi_r}_{\beta,p}\right)_C \leq \mathcal{E}_n\left(C^{\psi_r}_{\beta,p}\right)_C \leq$$

$$\leq C_{a,b}\ (2p)^{1-\frac{1}{p}} \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (67)$$

де величини C_a і $C_{a,b}$ означаються формулами (5) і (6) при $a = a(\alpha,r)$, $b = b(\alpha,r)$, що задані за допомогою рівностей (65) і (66) відповідно.

Зазначимо також, що оскільки

$$\eta(\psi_r;n)-n = n\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right) \asymp n^{1-r},\ r \in (0,1],\ \alpha > 0,$$

то з (67) випливають порядкові рівності

$$\mathcal{E}_n\left(C^{\psi_r}_{\beta,p}\right)_C \asymp E_n\left(C^{\psi_r}_{\beta,p}\right)_C \asymp \exp\left(-\alpha n^r\right) n^{\frac{1-r}{p}},\ 1 \leq p < \infty, \qquad (68)$$

де запис $A(n) \asymp B(n)$ $(A(n) > 0,\ B(n) > 0)$ означає існування додатних сталих K_1 і K_2 таких, що $K_1 B(n) \leq A(n) \leq K_2 B(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Для величини $\mathcal{E}_n\left(C^{\psi_r}_{\beta,p}\right)_C$ оцінка (68) встановлена в роботі [22].

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t)=\infty$, $1<s\le\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді для довільних* $n\in\mathbb{N}$, *таких, що* $\eta(n)-n\ge a>2$, $\mu(n)\ge b>2$ *справедливі оцінки*

$$C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}\le E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_s\le \mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1})_s\le$$

$$\le C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\,\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}\,, \tag{69}$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами* (5) *і* (6) *відповідно.*

Доведення. Для отримання оцінки зверху величини $\mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1})_s$ використаємо інтегральне зображення (7) та нерівність Юнга (див., наприклад, [1, с. 293]). Тоді для довільних $1\le s\le\infty$, одержимо

$$\mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_s\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_s\|\varphi(\cdot)\|_1\le\frac{1}{\pi}\big\|\Psi_{\beta,n}(\cdot)\big\|_s. \tag{70}$$

Із співвідношень (23) і (24) за умов теореми 2 випливає нерівність

$$\frac{1}{\pi}\|\Psi_{\beta,n}(t)\|_s\le C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\psi(n)\,(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s}}\,,\quad 1<s\le\infty,\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1. \tag{71}$$

Об'єднуючи (70) і (71), одержуємо оцінку зверху для величини $\mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1})_s$ в співвідношенні (69).

Щоб одержати оцінку знизу величини $E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_s$, $1<s\le\infty$, розглянемо функцію $f_p(t)$ вигляду (26) при $p=1$, тобто функцію вигляду

$$f_1(t)=f_1(n,\psi,t)=\frac{(a-1)(a-2)}{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}\times$$

$$\times\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right).$$

В силу співвідношення (51) при $p=1$ для (ψ,β)–похідної функції $f_1(\cdot)$ виконується нерівність $\left\|\big(f_1(\cdot)\big)^\psi_\beta\right\|_1\le 1$, а отже має місце включення $f_1(\cdot)\in L^\psi_{\beta,1}$.

Покажемо тепер, що при довільних $\psi\in\mathfrak{M}_\infty^+$, $\lim\limits_{t\to\infty}(\eta(\psi,t)-t)=\infty$, $\eta(n)-n\ge a>2$, $\mu(n)\ge b>2$, $\beta\in\mathbb{R}$

$$E_n(f_1)_s\ge C_a\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}},\ 1\le s\le\infty. \tag{72}$$

З нерівностей (10), (49), (50) та рівності (60), для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$, маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f_1(t)-t_{n-1}(t)\big)\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)dt\le$$

$$\le\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(1;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(1;0;t)\right)\right\|_{s'}=$$

$$=\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s\left\|\left(W_{[\eta(n)],[\eta(\eta(n))]}(\psi;0;t)-W_{n,[\eta(n)]}(\psi;0;t)\right)^\psi_0\right\|_{s'}\le$$

$$\leq \frac{2\,(1+\pi^2)\,a(3a-4)}{(a-1)(a-2)}(\eta(n)-n)^{1-\frac{1}{s'}}\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s. \qquad (73)$$

Зі співвідношень (59) і (73) випливає нерівність, справедлива для будь-якого $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|f_1(t)-t_{n-1}(t)\|_s \geq \frac{\pi}{96\,(1+\pi^2)^2}\frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}} =$$

$$= C_{a,b}\psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{s'}}. \qquad (74)$$

Тим самим нерівність (72) доведено, а разом з нею і теорему 2.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi_r(t)=\exp(-\alpha t^r)$, $r\in(0,1)$, $\alpha>0$, $1<s\leq\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді для всіх номерів* n, *таких, що*

$$n\geq 1+\max\left\{\left(\frac{2r\alpha}{\ln 2}\right)^{\frac{1}{1-r}}, 2\left(\frac{\ln 2}{\alpha\,(3^r-2^r)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

справедливі оцінки

$$C_a\exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}} \leq$$

$$\leq E_n\left(L^{\psi_r}_{\beta,1}\right)_s \leq \mathcal{E}_n\left(L^{\psi_r}_{\beta,1}\right)_s \leq$$

$$\leq C_{a,b}\ (2s')^{\frac{1}{s}}\exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1}{s'}}\left(\left(\frac{\ln 2}{\alpha n^r}+1\right)^{\frac{1}{r}}-1\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де величини C_a *і* $C_{a,b}$ *означаються формулами (5) і (6) при* $a=a(\alpha,r)$, $b=b(\alpha,r)$, *що в свою чергу задані за допомогою рівностей (65) і (66) відповідно.*

Також для величин $E_n\left(L^{\psi_r}_{\beta,1}\right)_s$, $r\in(0,1]$, $\alpha>0$, $1<s\leq\infty$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, можна записати аналогічне до (68) співвідношення

$$\mathcal{E}_n\left(L^{\psi_r}_{\beta,1}\right)_s \asymp E_n\left(L^{\psi_r}_{\beta,1}\right)_s \asymp \exp(-\alpha n^r)\,n^{\frac{1-r}{s'}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Література

[1] Степанец А.И. *Методы теории приближений.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч.I. — 427 с.

[2] Степанец А.И. *Классификация и приближение периодических функций.* — — Киев: Наук. думка — 1987. — 268 с.

[3] Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л. Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №12. — С. 1686–1708.

[4] Temlyakov V.N. *Approximation of Periodic Function*: Nova Science Publi– chers, Inc. — 1993. — 419p.

[5] Kolmogoroff A. Zur Grössennordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math.(2), — 1935. — **36**, №2. — P. 521–526.

[6] Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1940. — **4**, №6. — С. 521–528.

[7] Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, №3. — С. 207–256.

[8] Favard J. Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // C.R. Acad. Sci. — 1936. — **203**. — P. 1122–1124.

[9] Favard J. Sur les meilleurs procédes d'approximations de certains classes de fontions par des polynomes trigonométriques // Bull. de Sci. Math. — 1937. — **61**. — P. 209–224, 243–256.

[10] Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s–ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1953. — **17**. — С. 135–162.

[11] Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. — 1974. — **16**, №5. — С. 691–701.

[12] Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР, Сер. мат. — 1956. — **20**, — С. 643–648.

[13] Сунь Юн–шен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — **23**, №1. — С. 67–92.

[14] Бабенко В.Ф., Пичугов С.А. О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. — 1980. — **27**, №5. — С. 683–689.

[15] Степанец А.И., Кушпель А.К. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №4. — С. 483–492.

[16] Сердюк А.С., Соколенко І.В. Рівномірні наближення класів $(\psi,\overline{\beta})$–диференційовних функцій лінійними методами // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2011. — **8**, №1. — С. 181–189.

[17] Сердюк А.С., Соколенко І.В. Наближення лінійними методами класів $(\psi,\overline{\beta})$–диференційовних функцій // Arxiv preprint, arXiv:1303.1300v1, 2013. — 8 с.

[18] Сердюк А.С., Грабова У.З. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ,β) – диференційовних функцій // Arxiv preprint, arXiv:1301.7620v1, 2013. — 14 с.

[19] Степанец А.И. *Методы теории приближений.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч.II. — 468 с.

[20] Сердюк А.С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій// Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — 2004. — Т.1, №1. — С. 294–336.

[21] Сердюк А.С. Про найкраще наближення на класах згорток періодичних функцій // Теорія наближення та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. Т.41. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — С. 168–189.

[22] Романюк В.С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **46**, — С. 131–135.

[23] Сердюк А.С. Наближення нескінченно диференційовних періодичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами. — Укр. мат. журн. —– 2004. —– **56**, №4. —– С. 495–505.

[24] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* — М.: Физматиз, 1962. — 1100 с.

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net